

Ejercicio 2 (Convocatoria ordinaria 1 – curso 2018/19).

Sea $X = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\}$ y en él se define la siguiente relación binaria:

$$x R y \text{ si y sólo si } x + y \equiv 0 \pmod{4} \text{ (} x + y \text{ es múltiplo de 4)}$$

a) Estudiar si R es una relación de equivalencia en X .

b) Definir conjunto cociente y clase de equivalencia. Calcular, si es posible, X/R .

$$\begin{aligned} a) \quad x R y &\Leftrightarrow x + y \text{ es múltiplo de 4} \\ &\Leftrightarrow x + y = 4k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

• Reflexiva

$$\forall x \in X, \quad x R x ?$$

$x + x$ es un múltiplo de 4

$$x \in X, \quad x = 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x + x} = 2k + 2k = \underline{4k} \Rightarrow x R x$$

• Simétrica

$$\text{Si } x R y \Rightarrow y R x ?$$

$$\Downarrow \\ x + y = 4k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$y + x = x + y = 4k \Rightarrow y R x$$

• Transitiva

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} x R y \\ y R z \end{array} \right\} \Rightarrow x R z ?$$

$$\rightarrow x + y = 4k_1 \text{ con } k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow y + z = 4k_2 \text{ con } k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x + 2y + z = 4(k_1 + k_2)}$$

$$y \in X \Rightarrow y = 2q \\ q \in \mathbb{Z}$$

$$x + z = 4(k_1 + k_2) - 2y = 4(k_1 + k_2 - q) //$$

$$b) \mathbb{X}/R = \{ \bar{x} / x \in \mathbb{X} \}$$

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{ x \in \mathbb{X} / x R 0 \} = \{ x \in \mathbb{X} / x + 0 \text{ múltiplo de } 4 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{X} / x = 4k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \} = \dot{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{2} &= \{ x \in \mathbb{X} / x R 2 \} = \{ x \in \mathbb{X} / x + 2 \text{ múltiplo de } 4 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{X} / x + 2 = 4k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \} = \\ &= \{ x \in \mathbb{X} / x = 4k + 2 \} \end{aligned}$$

$$\bar{4} = \bar{0}, \quad \bar{6} = \bar{2}, \quad -\bar{2} = \bar{2}, \quad -\bar{4} = \bar{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{X}/R &= \{ \bar{0}, \bar{2} \} = \{ \{ \text{múltiplos de } 4 \}, \\ &\quad \{ \text{múltiplos de } 4 + 2 \} \} \\ &= \{ \{ 4k / k \in \mathbb{Z} \}, \{ 4k + 2 / k \in \mathbb{Z} \} \} \end{aligned}$$